
POLYTOPE DER 0, 1-OPTIMIERUNG MIT EINEM QUADRATISCHEN TERM

An der Fakultät für Mathematik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
zur Erlangung des akademischen Grades Master of Science angefertigte

MASTERARBEIT

vorgelegt von MIRJAM FRIESEN
geboren am 06.10.1988 in Hamburg,
Studiengang Mathematik,
mit Anwendungsfach Informatik.

18. August 2014

Betreut am Institut für Mathematische Optimierung
von PROF. DR. VOLKER KAIBEL

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	QMST-Polytop mit einem quadratischen Term	2
2	Quadratische Optimierung über das Parity-Polytop	5
2.1	Erweiterte Formulierung des Parity-Polytops	10
3	QMST-Polytop für planare Graphen	13
4	Zusammenfassung und offene Fragen	27
	Literaturverzeichnis	29
	Danksagung	31
	Erklärung zur Selbständigkeit	33

Kapitel 1

Einleitung

In der kombinatorischen Optimierung sucht man nach einer optimalen Entscheidung zwischen abzählbar vielen Möglichkeiten, zum Beispiel einen kürzesten Weg zwischen zwei Orten. Zum Lösen solcher Probleme versucht man sie oft als ganzzahliges oder sogar lineares Optimierungsproblem zu beschreiben. In vielen Fällen hat man nicht nur ganzzahlige sondern sogar 0,1-Probleme.

Wir sprechen von linearer Optimierung, wenn wir eine lineare Zielfunktion unter der Einschränkung mehrerer linearer Gleichungen und Ungleichungen optimieren wollen, diese Beschreibung wird *lineares Programm* (LP) genannt. Die Einschränkungen durch Gleichungen und Ungleichungen beschreiben ein Polyeder. Lineare Programme sind in polynomieller Zeit (abhängig von der Größe der Beschreibung) lösbar. Betrachtet man das Polyeder zu einem kombinatorischen Optimierungsproblem, hat es in den meisten Fällen exponentiell viele Facetten (im Bezug auf die Anzahl der Variablen, also der Dimension). Das bedeutet die lineare Beschreibung des kombinatorischen Problems wird sehr groß und so ist es mithilfe der Methoden der linearen Optimierung nicht in polynomieller Zeit lösbar.

Es gibt in der Tat viele NP -schwere Probleme in der kombinatorischen Optimierung. Das wohl berühmteste Beispiel hierfür ist das Problem des Handlungsreisenden (kurz TSP für *Travelling Salesman Problem*). Ein Handlungsreisende sucht nach einer kürzesten Rundtour durch eine Menge von Städten. Ende der achtziger Jahre versuchte man $P = NP$ zu zeigen, indem man polynomiell große Beschreibungen eines LPs für das TSP suchte. Man fügte zusätzliche Variablen ein um dafür weniger Bedingungen zu benötigen. Mihalis Yannakakis zeigte 1991 in [Yan91], dass dies mithilfe *symmetrischen* Formulierungen weder für das TSP noch für das Matching-Polytop möglich ist. Symmetrisch bedeutet in diesem Zusammenhang im Wesentlichen, dass man die Knoten im vollständigen Graphen permutieren kann. Diese Eigenschaft trifft auf viele LPs zu.

Der Ansatz durch zusätzliche Variablen die Beschreibung des Polytops zu verkürzen ist heute als *erweiterte Formulierung* bekannt. Eine erweiterte Formulierung ist ein höherdimensionales Polyeder zusammen mit einer Projektion auf das ursprüngliche Polyeder. Man kann nun statt über dem originalen Polyeder über das erweiterte optimieren. Es konnten schon einige kombinatorische Probleme auf diese Weise als kleiner LPs beschrieben werden. Einen Überblick über das Thema geben Conforti et al. in [CCZ13].

Ein Beispiel hierfür ist das *Minimaler-Spannbaum-Problem* (kurz MST-Problem für *Minimal Spanning Tree*). Dafür betrachten wir einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion auf den Kanten E . Ein minimaler Spannbaum ist ein Baum in G , der alle Knoten enthält und dessen Kantengewichte insgesamt minimal sind. Wir wissen, dass sich solch ein Baum in der Zeit $O(|E| \log |V|)$ zum Beispiel mit Prim's oder Kruskal's Algorithmus finden lässt. Die Beschreibung des MST-Polytops ist allerdings exponentiell zur Anzahl der Knoten, vgl. Kapitel 1.1. R. Kipp Martin stellte 1991 eine

erweiterte Formulierung der Größe $O(|V|^3)$ für das MST-Polytop vor [Mar91] und Justin C. Williams fand 2002 eine erweiterte Formulierung des MST-Polytops für planare Graphen mit der Größe $O(|V| + |E|)$. [Wil02].

Wir wollen in dieser Arbeit nun Probleme mit quadratischer Zielfunktion betrachten, dies macht die Optimierung sicherlich erheblich schwerer. So ist zum Beispiel das MST-Problem mit quadratischer Zielfunktion (im folgenden *QMST-Problem* genannt) *NP*-schwer [AX92], während das Problem mit linearer Zielfunktion wie gesagt in *P* ist. Wir wollen untersuchen wie man quadratische Zielfunktionen linearisieren und wie man die zugehörigen Polytope beschreiben kann. Buchheim und Klein stellten in [BK13] eine vollständige Beschreibung des QMST-Polytops mit einem quadratischen Term vor, siehe Kapitel 1.1. Diese wurde zunächst von Fischer und Fischer [FF13] bewiesen und kurz darauf gaben Buchheim und Klein in [BK14] noch einen alternativen Beweis. Des Weiteren stellten Buchheim und Klein in [BK14] polynomielle Separationsalgorithmen für die neuen Beschränkungen vor und zeigten experimentell eine wesentliche Laufzeitverbesserung im *Branch and Bound* Algorithmus.

Ich werde im Kapitel 2 ihre Methode auf das Parity-Polytop übertragen, also eine vollständige Beschreibung des Parity-Polytops mit einem quadratischen Term geben. Mich interessiert, inwiefern man erweiterte Formulierungen und Linearisierung verknüpfen kann. Die Beschreibung des Parity-Polytops ist exponentiell in n (Anzahl der Variablen, bzw. Größe der Dimension), es existiert jedoch eine erweiterte Formulierung der Größe $O(n)$. Für diese erweiterte Formulierung werde ich Linearisierungen bestimmter quadratischer Terme einbauen ohne die Komplexitätsklasse zu ändern.

Im 3. Kapitel untersuche ich inwiefern sich Buchheim und Kleins Beschreibung des QMST-Polytops auf Williams [Wil02] erweiterte Formulierung für planare Graphen übertragen lässt.

1.1 QMST-Polytop mit einem quadratischen Term

Das Spannbaum-Polytop ist definiert als

$$P_{MST} = \text{conv} \{ x \in \{0, 1\}^E \mid x \text{ charakteristische Vektor eines Spannbaums} \}.$$

Für $S \subseteq V$ sei $G(S)$ der durch S aufgespannte Teilgraph von G und $E(S) = E(G(S))$ seien die Kanten in $G(S)$. Des Weiteren sei $x(E(S)) = \sum_{e \in E(S)} x_e$. Das MST-Polytop wird auch durch folgendes lineare System beschrieben

$$(1.1.1) \quad x(E(V)) = |V| - 1$$

$$(1.1.2) \quad x(E(S)) \leq |S| - 1 \text{ für alle } S \subseteq V$$

$$(1.1.3) \quad 0 \leq x \leq 1$$

Die zweite Ungleichung (1.1.2) wird *Subtour Eliminationsbedingung* genannt.

Buchheim und Klein stellten in [BK13] eine vollständige Beschreibung des QMST-Polytops mit einem linearisierten quadratischen Term vor. Sei y die Linearisierungsvariable für das Produkt $x_f x_g$. Für $x \in \{0, 1\}^E$ lässt sich y folgendermaßen beschreiben:

$$(1.1.4) \quad y \leq x_f, x_g$$

$$(1.1.5) \quad y \geq x_f + x_g - 1.$$

Dies reicht allerdings nicht aus um das QMST-Polytop vollständig zu beschreiben. Buchheim und Klein unterscheiden für die weiteren Bedingungen den zusammenhängenden und den nicht zusammenhängenden Fall. Der zusammenhängende Fall besteht genau dann, wenn f und g einen gemeinsamen Knoten v haben.

Theorem 1.1.1 (QMST-Polytop für den zusammenhängenden Fall). *Es sei*

$$P^c := \text{conv} \left\{ (x, y) \in \{0, 1\}^{|E|+1} \mid x \in P_{MST}, y = x_f x_g \right\}$$

mit $f = \{u, v\}$ und $g = \{v, w\}$, dann wird P^c beschrieben durch (1.1.1) - (1.1.5) und

$$(1.1.6) \quad x(E(S)) + y \leq |S| - 1 \quad \text{für alle } S \subset V \text{ mit } u, w \in S \text{ und } v \notin S.$$

Theorem 1.1.2 (QMST-Polytop für den nicht zusammenhängenden Fall). *Es sei*

$$P^d := \text{conv} \left\{ (x, y) \in \{0, 1\}^{|E|+1} \mid x \in P_{MST}, y = x_f x_g \right\}$$

mit $f = \{u, v\}$ und $g = \{w, z\}$, dann wird P^d beschrieben durch (1.1.1) - (1.1.5) und

$$(1.1.7) \quad x(E(S_1)) + x(E(S_2)) + y \leq |S_1| + |S_2| - 2$$

für alle $S_1, S_2 \subset V$, so dass f und g jeweils genau einen Endknoten in S_1 und einen Endknoten in S_2 haben.

Da (1.1.6) und (1.1.7) Verstärkungen von (1.1.2) sind werden sie *quadratische Subtour-Eliminationsbedingungen* genannt.

Kapitel 2

Quadratische Optimierung über das Parity-Polytop

Wir wollen Buchheim und Kleins Methode auf das Parity-Polytop

$$P_{EVEN} := \text{conv} \{x \in \{0, 1\}^n \mid |x| \in 2\mathbb{Z}\}.$$

übertragen. Der Betrag sei hier $|x| := \sum_{i=1}^n |x_i|$. Es ist bekannt, dass P_{EVEN} sich folgendermaßen beschreiben lässt

$$(2.0.1) \quad P_{EVEN} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i \leq |I| - 1 \text{ für alle } I \subseteq [n], |I| \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\}.$$

Wobei $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. Ziel ist es für gegebene $c_i \in \mathbb{R}$ und $q_{i,j} \in \mathbb{R}$ folgendes Optimierungsproblem zu lösen:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n q_{i,j} x_i x_j \mid x \in P_{EVEN} \right\}.$$

In dieser Arbeit betrachten wir lediglich das Problem mit nur einem quadratischen Term $q_{k,\ell} x_k x_\ell$ und linearisieren ihn wie Buchheim und Klein indem wir die zusätzliche Variable $y = x_k x_\ell$ einfügen. Im folgendem sei

$$P_{QEVEN} := \text{conv} \{ (x, y) \in \{0, 1\}^{n+1} \mid |x| \in 2\mathbb{Z}, y = x_k x_\ell \}.$$

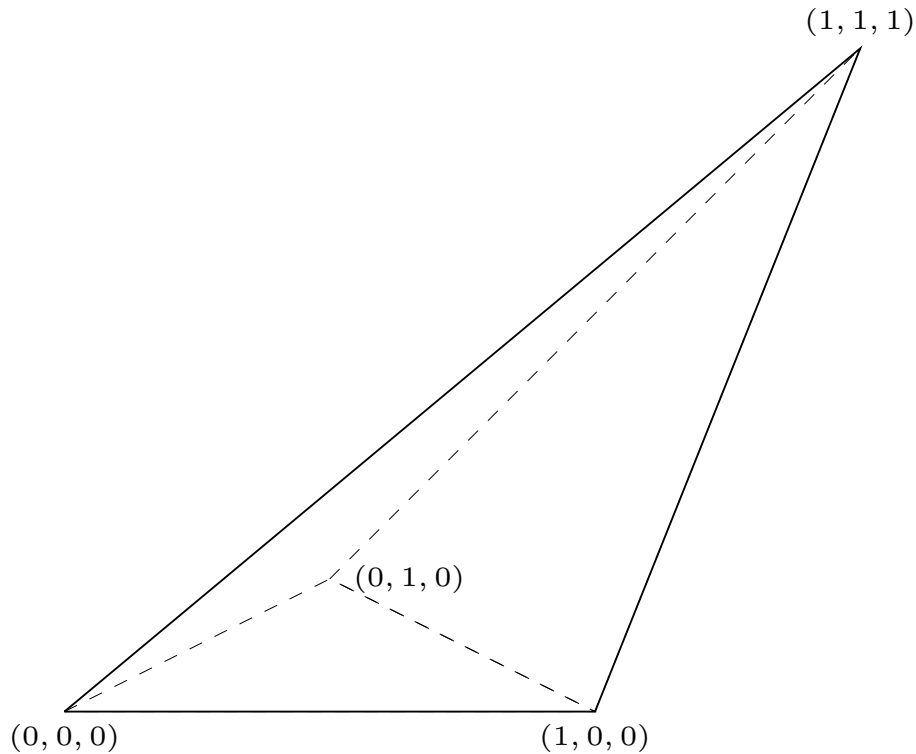
Wie Buchheim und Klein verknüpfen wir y mit x_k und x_ℓ durch

$$(2.0.2) \quad y \leq x_k, x_\ell$$

$$(2.0.3) \quad y \geq x_k + x_\ell - 1.$$

Wir betrachten o.B.d.A. den Fall $k = n - 1$ und $l = n$. Sei

$$\begin{aligned} P_q &:= \text{conv} \{ (x_k, x_\ell, y) \in \{0, 1\}^3 \mid y = x_k x_\ell \} \\ &= \text{conv} \{ (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1) \} \\ &= \{ (x_k, x_\ell, y) \in [0, 1]^3 \mid (x_k, x_\ell, y) \text{ erfüllen (2.0.2) und (2.0.3)} \} \end{aligned}$$

Abbildung 2.1: Polytope P_q

siehe Abbildung 2.1 und $C_m = [0, 1]^m$ der m -dimensionale 0, 1-Würfel. Es gilt

$$P_{QEVEN} \subseteq C_{n-2} \times P_q.$$

Gleichheit ist nicht erfüllt. Um von $C_{n-2} \times P_q$ zu P_{QEVEN} zu kommen schauen wir uns zunächst die Adjazenzstruktur von $C_{n-2} \times P_q$ an.

Lemma 2.0.3. Sei (p, q) eine Ecke von $P \times Q$. Dann ist p bzw. q eine Ecke von P bzw. Q und die Nachbarn von (p, q) sind

$$N(p, q) = \{ (p, q') \mid q' \text{ ist Nachbar von } q \text{ in } Q \} \cup \{ (p', q) \mid p' \text{ ist Nachbar von } p \text{ in } P \}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass p und q Ecken von P bzw. Q sind. Sei also (p, q) eine Ecke von $P \times Q$. Angenommen p wäre keine Ecke von P , dann gibt es eine Konvexkombination

$$p = \lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2$$

mit $0 < \lambda < 1$, $p_1, p_2 \in P$ und $p_1 \neq p_2$. Daraus folgt allerdings

$$(p, q) = \lambda(p_1, q) + (1 - \lambda)(p_2, q)$$

und wir haben eine Widerspruch dazu, dass (p, q) eine Ecke ist. Der Fall q keine Ecke von Q ergibt sich analog.

Als nächstes Zeigen wir, dass jede Kante in $P \times Q$ die oben beschriebenen Eigenschaften erfüllt. Sei also $\text{conv}\{(p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$ eine Kante in $P \times Q$ mit p_1, p_2 Ecken von P und q_1, q_2 Ecken von Q . Angenommen $p_1 \neq p_2$ und $q_1 \neq q_2$, dann gilt

$$(p, q) := \frac{1}{2}(p_1, q_1) + \frac{1}{2}(p_2, q_2) = \frac{1}{2}(p_1, q_2) + \frac{1}{2}(p_2, q_1).$$

Da (p, q) sich als Konvexkombination verschiedener Ecken darstellen lässt, liegt es in keiner Kante von $P \times Q$ und wir erhalten einen Widerspruch. Es gilt also entweder $p_1 = p_2$ oder $q_1 = q_2$.

Betrachten wir nun also den Fall $q_1 = q_2 = q$, so bleibt zu zeigen, dass p_1 und p_2 Nachbarn in P sind. Angenommen das wäre nicht der Fall, so gibt es ein $p \in P$, welches sich als Konvexkombination von p_1 und p_2 darstellen lässt, aber auch als Kombination anderer Ecken:

$$p := \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 = \sum \mu_i p_i$$

mit $0 < \lambda < 1$ und mindestens ein $\mu_i \neq 0$ mit $i \neq 1, 2$. Daraus ergibt sich nun

$$(p, q) = \lambda(p_1, q) + (1 - \lambda)(p_2, q) = \sum \mu_i(p_i, q).$$

Das bedeutet (p, q) kann nicht in einer Kante von $P \times Q$ liegen und wir erhalten einen Widerspruch. Analog gilt für $p_1 = p_2 = p$, dass q_1 und q_2 Nachbarn in Q sind.

Es bleibt also zu zeigen, dass wir auch zu jeder Kante von P bzw. Q eine Kante von $P \times Q$ erhalten. Seien nun also p_1, p_2 benachbarte Ecken von P und q eine Ecke von Q . Wir definieren nun für $0 < \lambda < 1$

$$(p, q) := \lambda(p_1, q) + (1 - \lambda)(p_2, q) = (\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, q)$$

Angenommen $\text{conv}\{(p_1, q), (p_2, q)\}$ wäre keine Kante von $P \times Q$, dann gäbe es eine weitere Konvexkombination von Ecken für (p, q) . Da die Kombination für p eindeutig ist (p liegt in einer Kante von P), heißt das es gibt eine Konvexkombination für q . Das würde bedeuten, dass q keine Ecke von Q ist und wir erhalten einen Widerspruch. Analog ergibt sich $\text{conv}\{(p, q_1), (p, q_2)\}$ als Kante in $P \times Q$ mit p Ecke von P und q_1, q_2 benachbarte Ecken von Q . \square

Es gibt also in $C_{n-2} \times P_q$ einerseits Kanten, die aus Kanten von C_{n-2} entstehen und andererseits Kanten, welche durch Kanten in P_q erzeugt werden. Zwei Nachbarn in C_{n-2} haben stets unterschiedliche Parität, da sie sich in genau einem Eintrag unterscheiden. In P_q dagegen gibt es die bzgl. x paritätserhaltenden Kanten

$$\text{conv}\{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\} \text{ und } \text{conv}\{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$

Die anderen Kanten in P_q sind wie die Kanten in C_{n-2} paritätsverändernd. Wir haben also folgenden drei Sorten von Kanten in $C_{n-2} \times P_q$:

- durch Kanten aus C_{n-2} entstandenen Kanten (paritätsverändernd),
- paritätsverändernde Kanten die zu Kanten von P_q assoziiert werden und
- paritätserhaltende Kanten, welche von P_q erzeugt werden.

Beobachtung 2.0.4. Die bzgl. x paritätserhaltenden Kanten

$$\begin{aligned} &\text{conv}\{(\bar{x}, 0, 0, 0), (\bar{x}, 1, 1, 1)\} \text{ für } |\bar{x}| \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ &\text{conv}\{(\bar{x}, 0, 1, 0), (\bar{x}, 1, 0, 0)\} \text{ für } |\bar{x}| \in 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

enthalten alle für $P_{Q\text{EVEN}}$ ungültigen Ecken aus $C_{n-2} \times P_q$ und alle Nachbarn dieser Kanten sind in $P_{Q\text{EVEN}}$.

Beweis. Jede Ecke aus $C_{n-2} \times P_q$ mit $|x| = 2\mathbb{Z} + 1$ entspricht offensichtlich einer der vier Eckpunkttypen. Da sich die beiden Kantentypen in keiner Ecke treffen können, müssen alle Nachbarn einer solchen Kante von anderer Parität und somit gültig für P_{QEVEN} sein. \square

Das gesuchte Polytop P_{QEVEN} erhalten wir also indem wir die ungültigen Kanten aus Beobachtung 2.0.4 von $C_{n-2} \times P_q$ abschneiden ohne dabei neue Ecken entstehen zu lassen. Dies werden wir mit den folgenden zwei Sätzen erreichen.

Ähnlich wie bei Buchheim-Klein, erhalten wir eine Sorte dieser Ungleichungen durch Verschärfung der Geradzahligkeitsbedingungen in (2.0.1).

Satz 2.0.5. Sei $|I| \subseteq [n]$ mit $k, \ell \notin I$ und $|I| \in 2\mathbb{Z} + 1$, so ist

$$(2.0.4) \quad \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i + 2y \leq |I| - 1.$$

ungültig für

$$\text{conv}\{(\bar{x}, 0, 0, 0), (\bar{x}, 1, 1, 1)\} \quad \text{mit } \bar{x}_i = 1 \text{ für alle } i \in I \text{ und } \bar{x}_i = 0 \text{ sonst.}$$

Des Weiteren ist die Ungleichung für alle Nachbarn dieser Kante in $C_{n-2} \times P_q$ mit Gleichheit erfüllt und gültig für P_{QEVEN} .

Beweis. Wir erhalten für $(x, y) \in \text{conv}\{(\bar{x}, 0, 0, 0), (\bar{x}, 1, 1, 1)\} \not\subseteq P_{QEVEN}$

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i + 2y = |I| - x_k - x_\ell + 2y = |I| > |I| - 1.$$

Die Ungleichung trennt also die ungültige Kante $\text{conv}\{(\bar{x}, 0, 0, 0), (\bar{x}, 1, 1, 1)\}$ von P_{QEVEN} .

Sei nun (x, y) ein Nachbar von $\text{conv}\{(\bar{x}, 0, 0, 0), (\bar{x}, 1, 1, 1)\}$, so gilt entweder $x_i = 1 - \bar{x}_i$ für genau ein $i \in [n - 2]$ und $(x_k, x_\ell, y) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$, oder $(x, y) \in \{(\bar{x}, 0, 1, 0), (\bar{x}, 1, 0, 0)\}$. Wir rechnen nun leicht nach, dass gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i + 2y \\ &= \begin{cases} |I| - 1 - x_k - x_\ell + 2y & \text{für } x_i = 1 - \bar{x}_i \text{ für genau ein } i \in [n - 2] \\ |I| - x_k - x_\ell + 2y & \text{für } x \in \{(\bar{x}, 0, 1, 0), (\bar{x}, 1, 0, 0)\} \end{cases} \\ &= |I| - 1. \end{aligned}$$

Für alle weiteren $(x, y) \in P_{QEVEN}$ gilt

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i + 2y \leq |I| - 1 - x_k - x_\ell + 2y \leq |I| - 1.$$

\square

Zu jeder Kante des Typs

$$\text{conv}\{(\bar{x}, 0, 0, 0), (\bar{x}, 1, 1, 1)\} \quad \text{für } |\bar{x}| \in 2\mathbb{Z} + 1$$

finden wir eine Menge $I \subseteq [n]$ mit $k, \ell \notin I$ und $|I| \in 2\mathbb{Z} + 1$ für Satz 2.0.5 wie folgt:

$$I := \{i \in [n - 2] \mid \bar{x}_i = 1\}.$$

Somit haben wir den einen Kantentyp aus Beobachtung 2.0.4 erfolgreich von $C_{n-2} \times P_q$ abgeschnitten. Die neuen Hyperebenen gehen durch alle Nachbarn der entsprechenden Kante, welche zusätzlich in P_{QEVEN} liegen. Dadurch wird keine der alten Kanten gekreuzt und neu entstehende Kanten können durch diese Hyperebenen ebenso wenig geschnitten werden, da sie bereits in P_{QEVEN} liegen. Das bedeutet es entstehen keine neuen Ecken.

Für den zweiten Kantentyp

$$\text{conv} \{(\bar{x}, 0, 1, 0), (\bar{x}, 1, 0, 0)\} \quad \text{für } |\bar{x}| \in 2\mathbb{Z}$$

aus Beobachtung 2.0.4 betrachten wir gerade Mengen $I \subseteq [n]$, $|I| \in 2\mathbb{Z}$. Für $x \in P_{EVEN} \subset C_n$ gilt offensichtlich

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i \leq |I|$$

Diese Bedingung wird nun wieder verstärkt um die Linearisierung einzubinden.

Satz 2.0.6. Für $|I| \subseteq [n]$ mit $k, \ell \in I$ und $|I| \in 2\mathbb{Z}$ ist die folgende Ungleichung

$$(2.0.5) \quad \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i - 2y \leq |I| - 2.$$

ungültig für

$$\text{conv} \{(\bar{x}, 0, 1, 0), (\bar{x}, 1, 0, 0)\} \quad \text{mit } \bar{x}_i = 1 \text{ für } i \in I \text{ und } \bar{x}_i = 0 \text{ sonst.}$$

Des Weiteren gilt für alle Nachbarn dieser Kante Gleichheit und die Ungleichung ist gültig für P_{QEVEN} .

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie in Satz 2.0.5. Sei $(x, y) \in \text{conv} \{(\bar{x}, 0, 1, 0), (\bar{x}, 1, 0, 0)\}$. Wir rechnen leicht nach, dass

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i - 2y = |I| - 2 + x_k + x_\ell = |I| - 1 > |I| - 2.$$

Sei nun (x, y) wieder ein Nachbar von $\text{conv} \{(\bar{x}, 0, 1, 0), (\bar{x}, 1, 0, 0)\}$, das heißt entweder ist $x_i = 1 - \bar{x}_i$ für genau ein $i \in [n-2]$ und $(x_k, x_\ell, y) \in \{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, oder es gilt $(x, y) \in \{(\bar{x}, 0, 0, 0), (\bar{x}, 1, 1, 1)\}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i - 2y \\ &= \begin{cases} |I| - 3 + x_k + x_\ell & \text{für } x_i = 1 - \bar{x}_i \text{ für genau ein } i \in [n-2] \\ |I| - 2 + x_k + x_\ell - 2y & \text{für } x \in \{(\bar{x}, 0, 0, 0), (\bar{x}, 1, 1, 1)\} \end{cases} \\ &= |I| - 2. \end{aligned}$$

Für alle weiteren $(x, y) \in P_{QEVEN}$ gilt

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i - 2y \leq |I| - 2 + x_k + x_\ell - 2y \leq |I| - 1,$$

wegen $|x| \in 2\mathbb{Z}$ wissen wir

$$\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i - 2y \right| \in 2\mathbb{Z}$$

und es folgt mit $|I| \in 2\mathbb{Z}$

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i - 2y \leq |I| - 2.$$

□

Diesmal konstruieren wir zu einer Kante

$$\text{conv} \{(\bar{x}, 0, 1, 0), (\bar{x}, 1, 0, 0)\} \quad \text{für } |\bar{x}| \in 2\mathbb{Z}$$

die gesuchte Menge $I \subseteq [n]$ für Satz 2.0.6 durch

$$I := \{i \in [n - 2] \mid \bar{x}_i = 1\} \cup \{k, \ell\}.$$

Wie in Satz 2.0.5 entstehen auch hier keine neuen Ecken und wir erhalten eine vollständige Beschreibung von P_{QEVEN} :

Theorem 2.0.7. *Es gilt P_{QEVEN} wird beschrieben durch:*

$$(2.0.2) \quad y \leq x_k, x_\ell$$

$$(2.0.3) \quad y \geq x_k + x_\ell - 1$$

$$(2.0.4) \quad \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i + 2y \leq |I| - 1 \quad \text{für alle } |I| \subseteq [n], k, \ell \notin I, |I| \in 2\mathbb{Z} + 1$$

$$(2.0.5) \quad \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \notin I} x_i - 2y \leq |I| - 2 \quad \text{für alle } |I| \subseteq [n], k, \ell \in I, |I| \in 2\mathbb{Z}$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

2.1 Erweiterte Formulierung des Parity-Polytops

Wir wollen überlegen, ob sich erweiterte Formulierungen von Polytopen zu erweiterten Formulierungen der Polytope mit quadratischen Variablen anpassen lassen. Für das Parity-Polytop ist die folgende lineare Erweiterung bekannt: Wir konstruieren den gerichteten Graphen $D = (V, A)$ wie in Abbildung 2.2 und betrachten das Polytop der s - t -Wege in D .

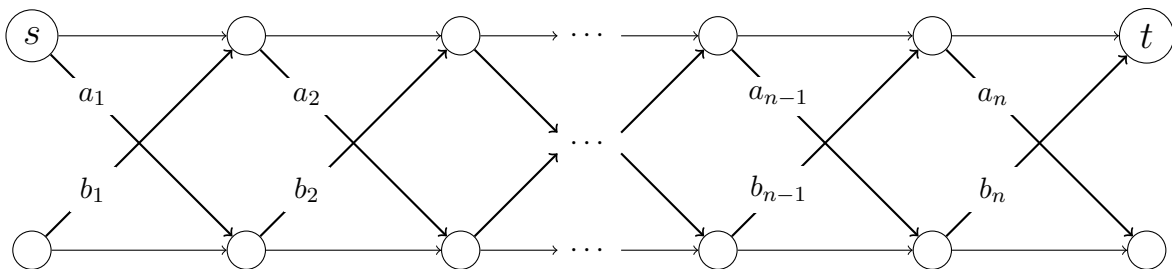


Abbildung 2.2: Darstellung des Graphen D

Satz 2.1.1. *Das Polyeder*

$$Q := \text{conv} \{y \in [0, 1]^A \mid y \text{ ist charakteristische Vektor eines } s\text{-}t\text{-Weges in } D\}$$

zusammen mit

$$\pi : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \pi(y)_i := y_{a_i} + y_{b_i}$$

ist eine erweiterte Formulierung des Parity-Polytops der Größe $O(n)$.

Beweis. Da π linear ist gilt

$$\begin{aligned} \pi(Q) &= \pi(\text{conv} \{y \mid y \text{ ist charakteristische Vektor eines } s\text{-}t\text{-Weges in } D\}) \\ &= \text{conv} \{ \pi(y) \mid y \text{ ist charakteristische Vektor eines } s\text{-}t\text{-Weges in } D \}. \end{aligned}$$

Es genügt also zu jedem s - t -Weg einen 0, 1-Vektor x mit gerader Anzahl an Einsen und umgekehrt zu finden.

Sei $y \in \{0, 1\}^A$ der charakteristische Vektor eines s - t -Weges in D . Zu jeder Kante a_i die ausgewählt wird, muss auch eine Kante b_j gewählt werden um zurück zur oberen Knotenreihe zu gelangen. Es gilt also

$$|\{i \in [n] \mid y_{a_i} = 1\}| = |\{i \in [n] \mid y_{b_i} = 1\}|.$$

Somit ergibt sich

$$|x| = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = 2 \sum_{i=1}^n a_i.$$

Andererseits finden wir zu jedem $x \in P_{EVEN}$ einen s - t -Weg indem wir bei s starten, bei $x_i = 0$ gerade aus weitergehen und bei $x_i = 1$ zwischen oberer und unterer Knotenreihe wechseln.

Es ist bekannt, dass

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^A \mid y \geq 0, \quad y(\delta^{aus}(s)) = 1, \quad y(\delta^{aus}(v)) = y(\delta^{ein}(v)) \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\}\}$$

gilt und somit $O(|A|) = O(4n)$ Facetten hat. □

Das Produkt zweier aufeinander folgenden Einträge x_i und x_{i+1} können wir ebenfalls im Graphen darstellen. Dazu blähen wir in D den Knoten zwischen a_i und b_{i+1} sowie den Knoten zwischen b_i und a_{i+1} wie in Abbildung 2.3 zu jeweils drei Knoten auf und erhalten $D' = (V', A')$. Wir suchen nun in

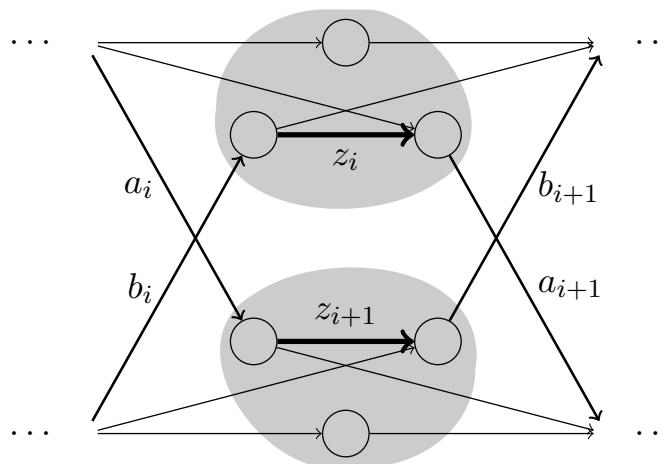


Abbildung 2.3: Abwandlung von D zu D'

D' wieder einen s - t -Weg und erweitern π zu π' .

Satz 2.1.2. *Das Polytop*

$$Q' = \left\{ y \in \mathbb{R}^{A'} \mid y \text{ ist charakteristischer Vektor eine } s\text{-}t\text{-Weges in } D' \right\}$$

mit

$$\pi' : \mathbb{R}^{A'} \rightarrow \mathbb{R}^{[n] \cup \{z\}}, \quad \pi'|_{[n]} = \pi \text{ und } \pi'(y)_z = y_{z_i} + y_{z_{i+1}}$$

ist eine erweiterte Formulierung der Größe $O(n)$ für P_{QEVEN} mit $k = i$, $\ell = i + 1$ und z als Linearisierungsvariable des Produkts $x_k x_\ell$.

Beweis. Sei y der charakteristische Vektor eine s - t -Weges in D' . Wir beobachten, dass sich ein Weg in D' leicht zu einem Weg in D reduzieren lässt und man umgekehrt einen Weg in D eindeutig zu einem Weg in D' erweitern kann. Damit können wir genau wie im vorigen Satz Wege auf Vektoren aus $\{0, 1\}^n$ und umgekehrt abbilden. Es ist also lediglich zu zeigen

$$y_{z_i} + y_{z_{i+1}} = z = x_i x_{i+1}.$$

Wir beobachten, dass gilt

$$y_{a_i} y_{a_{i+1}} = y_{b_i} y_{b_{i+1}} = 0$$

und

$$y_{z_i} = y_{a_{i+1}} y_{b_i} \quad \text{sowie} \quad y_{z_{i+1}} = y_{a_i} y_{b_{i+1}}.$$

Damit erhalten wir

$$z = x_i x_{i+1} = (y_{a_i} + y_{b_i})(y_{a_{i+1}} + y_{b_{i+1}}) = y_{a_i} y_{a_{i+1}} + y_{a_i} y_{b_{i+1}} + y_{b_i} y_{a_{i+1}} + y_{b_i} y_{b_{i+1}} = y_{z_{i+1}} + y_{z_i}.$$

Da $|A' \setminus A| = 6$ bleibt die Facettenanzahl von Q' wie Q linear. \square

Man kann natürlich genauso auch mehrere quadratische Terme hinzufügen, so lange es sich um das Quadrat aufeinander folgender Einträge handelt. Die Anzahl der Facetten erhöht sich dabei höchstens um $6 \cdot |\{\text{quadratischen Terme}\}|$.

Kapitel 3

QMST-Polytop für planare Graphen

Definition 3.0.3 (Planarer Graph). Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, wenn es eine Darstellung in der Ebene gibt, in der sich keine Kanten kreuzen.

Wenn wir im Folgenden von planaren Graphen sprechen, meinen wir stets seine planare Darstellung.

Eine wichtige Eigenschaft von planaren Graphen ist die Existenz des sogenannten *dualen Graphen*. Das heißt, der Graph $G_d = (F, E)$ der entsteht, wenn man die Flächen als Knoten betrachtet und jede Kante des ursprünglichen Graphen als Kante zwischen zwei Flächen.

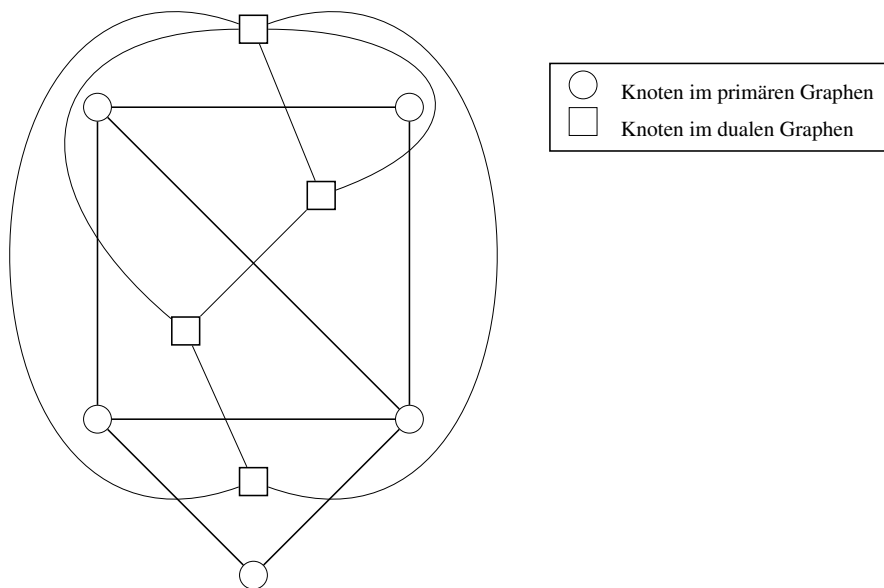


Abbildung 3.1: Planarer Graph mit dualem Graph

Dies bringt nun einige besondere Eigenschaften mit sich, wie zum Beispiel die folgende Aussage über die Anzahl der Knoten und Facetten.

Satz 3.0.4 (Eulers Polyedersatz für planare Graphen). Für einen planaren Graphen $G = (V, E)$ und seinen dualen Graphen $G_d = (F, E)$ gilt

$$|V| + |F| - |E| = 2.$$

Mit diesem Satz können wir nun folgenden Zusammenhang zwischen Spannbäumen im primären und dualen Graphen beweisen.

Satz 3.0.5. *Gegeben sein ein planare Graph $G = (V, E)$ und sein dualer Graph sei $G_d = (F, E)$. Sei nun $T \subseteq E$ ein Spannbaum im primären Graphen dann ist $T_d = E \setminus T$ ein Spannbaum im dualen Graphen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass T_d kreisfrei und zusammenhängend ist. Das erste folgt direkt daraus, dass T zusammenhängend ist. Hätte T_d nämlich einen Kreis so würde V in die Knoten innerhalb diese Kreises und außerhalb unterteilt werden, damit wäre T nicht zusammenhängend.

Mit Eulers Polyedersatz und $|T| = |V| - 1$ gilt

$$|T_d| = |E| - |T| = |E| - |V| + 1 = |F| - 1.$$

Da T_d kreisfrei ist, muss T_d damit ebenfalls zusammenhängend sein. \square

Diese Eigenschaft nutzt Justin C. Williams 2001 in seiner erweiterten Formulierung des MST-Polytops für planare Graphen in [Wil02]. Er wählt jeweils einen Wurzelknoten $v^* \in V$ und $v_d^* \in F$, wobei v_d^* im Rand von v^* liegt. Und konstruiert aus G einen gerichteten Graphen indem er jede Kante, die inzident zum Wurzelknoten ist, in den Wurzelknoten eingehend richten und für jede weitere Kante in jede Richtung eine Kante einführt. Die gleiche Vorgehensweise wendet er auf den dualen Graphen an.

Notation. Es seien $\delta(v) = \delta^{aus}(v)$ die ausgehenden Kanten von v im gerichteten Graphen und $\delta^{ein}(v)$ entsprechend die eingehenden Kanten. Es sei x_e das Gewicht der ungerichteten Kante e , also die Summe der dazugehörigen gerichteten Kanten, das gleiche gelte für y_e .

Theorem 3.0.6 (Williams). *Es seien $v^* \in V$ und $v_d^* \in F$, so dass v_d^* im Rand von v^* liegt. Das folgende Lineare System ist eine erweiterte Formulierung des MST-Polytops in planaren Graphen.*

$$(3.0.1) \quad x_e + y_e = 1 \quad \text{für alle } e \in E$$

$$(3.0.2) \quad x(\delta(v)) = 1 \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{v^*\}$$

$$(3.0.3) \quad y(\delta(v_d)) = 1 \quad \text{für alle } v_d \in F \setminus \{v_d^*\}$$

$$(3.0.4) \quad x, y \geq 0$$

Die Gleichung (3.0.1) sorgt dafür, dass von jedem Paar sich kreuzender Kanten genau eine ausgewählt wird, während (3.0.2) und (3.0.3) $|T| = |V| - 1$ und $|E \setminus T| = |F| - 1$ sicherstellen.

Wir wollen versuchen diese Formulierung auf ein Optimierungsproblem mit einen quadratischen Term zu übertragen. Für zwei Kanten f und g aus E ist das *quadratical minimal spanning tree Polytop*, kurz QMST-Polytop definiert als

$$P_{QMST} := \text{conv} \{ (x, z) \mid x \in \{0, 1\}^E \text{ Inzidenzvektor eines Spannbauams, } z = x_f x_g \}$$

vgl. Kapitel 1.1. Die Variable z sei die Linearisierung des quadratischen Terms und wird wie bei Buchheim und Klein mit

$$(3.0.5) \quad z \leq x_f, x_g$$

$$(3.0.6) \quad z \geq x_f + x_g - 1$$

an x_f und x_g gekoppelt.

Wir werden hier in dieser Arbeit nur den zusammenhängenden Fall betrachten. Das heißt f und g haben einen gemeinsamen inzidenten Knoten v . Es sei im folgenden stets $f = \{u, v\}$ und $g = \{v, w\}$ gewählt. Buchheim und Klein führten für diesen Fall die *quadratische Subtour-Eliminationsbedingung* ein:

$$(3.0.7) \quad x(E(S)) + z \leq |S| - 1 \quad \text{für alle } S \text{ mit } u, w \in S, v \notin S$$

Sie zeigten das gilt

$$P_{QMST} = \{(x, z) \mid x \in P_{MST}, x \text{ und } z \text{ erfüllen (3.0.5), (3.0.6) und (3.0.7)}\}.$$

Wir versuchen uns die Bedeutung der quadratischen Subtour-Eliminationsbedingung geometrisch klarzumachen. Dazu betrachten wir den Graphen H , der entsteht, wenn wir den Knoten v aus G mit allen inzidenten Kanten entfernen und dafür eine Kante zwischen u und w einfügen. Jener neuen Kante wird nun die Variable z zugeordnet. Sei also

$$E_H = (E \setminus \delta(v)) \cup \{\{u, w\}\}$$

und $H = (V \setminus \{v\}, E_H)$, siehe auch Abbildung 3.3. Dann beschreibt (3.0.7) mit $z = x_{\{u, w\}}$ zusammen mit

$$x(E(S)) \leq |S| - 1 \quad \text{für alle } S \subseteq V \setminus \{v\}$$

die Menge der Wälder in H .

Um Buchheim und Kleins Ansatz auf Williams Formulierung zu übertragen, wäre es also hilfreich Williams Beschreibung auf Wälder zu verallgemeinern. Der einfachste Ansatz ist die Gleichungen (3.0.2) und (3.0.3) zu

$$(3.0.8) \quad x(\delta(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V \setminus \{v^*\}$$

und

$$(3.0.9) \quad y(\delta(v_d)) \geq 1 \quad \forall v_d \in F \setminus \{v_d^*\}$$

abzuwandeln. Für einen gerichteten Wald sind diese Gleichungen offensichtlich gültig. Die Umkehrung gilt allerdings nicht wie das Beispiel in Abbildung 3.2 zeigt. Wir wollen dennoch untersuchen, inwiefern man hiermit das QMST-Polytop für planare Graphen beschreiben kann.

Vereinigen wir f und g zu der neuen Kante $\{u, w\} \in E_H$ welche den Wert z zugeordnet bekommt, bedeutet das, dass die an v anliegenden Flächen zu \bar{V} auf der einen Seite von f und g und \bar{W} auf der anderen Seite zusammenfassen. Wir fügen nun in den gerichteten Graphen noch die Kanten (\bar{V}, \bar{W}) und (\bar{W}, \bar{V}) mit den Werten $z_{\bar{V}}$ und $z_{\bar{W}}$ ein. (vgl. Abbildung 3.3)

Notation. Die Variable $x_{e,v}$ beschreibe den Wert der aus v ausgehenden Kante e im gerichteten Graphen. Analog sei y_{e,v_d} der Wert der aus v_d ausgehenden gerichteten Kante im dualen Graphen, welche $e \in E$ kreuzt.

Wenden wir die obigen Ungleichung (3.0.8) auf u und w in H an, erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &\geq x(\delta^{aus}(u) \setminus \{f\}) + z_u = (1 - x_{f,u}) + z_u && \Leftrightarrow && x_{f,u} \geq z_u \\ 1 &\geq x(\delta^{aus}(w) \setminus \{g\}) + z_w = (1 - x_{g,w}) + z_w && \Leftrightarrow && x_{g,w} \geq z_w \\ z &= z_u + z_w \end{aligned}$$

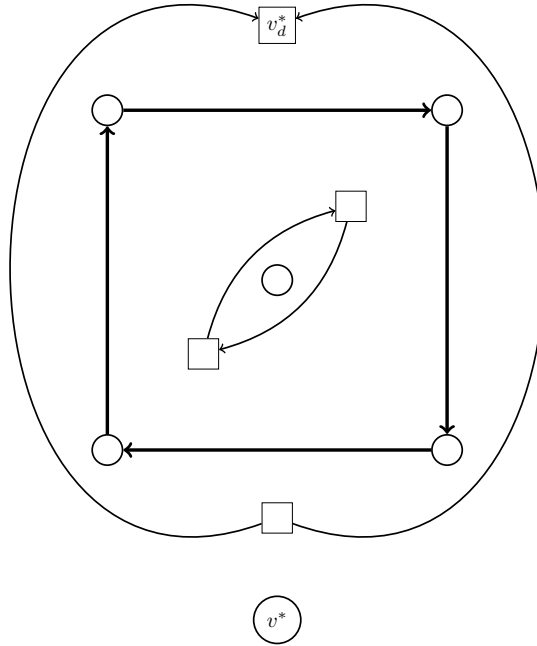


Abbildung 3.2: Beispiel wie die Ungleichungen (3.0.8) und (3.0.9) einen Kreis ermöglichen

was wir zu

$$(3.0.10) \quad x_{f,u} + x_{g,w} \geq z$$

kombinieren. Für den dualen Graphen ergibt sich aus (3.0.9)

$$(3.0.11) \quad y(\delta(\bar{V}) \setminus \{f, g\}) + z_{\bar{V}} \geq 1$$

$$(3.0.12) \quad y(\delta(\bar{W}) \setminus \{f, g\}) + z_{\bar{W}} \geq 1 \quad \text{falls } v_d^* \notin \bar{W}$$

und außerdem entsprechend zu (3.0.1)

$$(3.0.13) \quad z + z_{\bar{V}} + z_{\bar{W}} = 1.$$

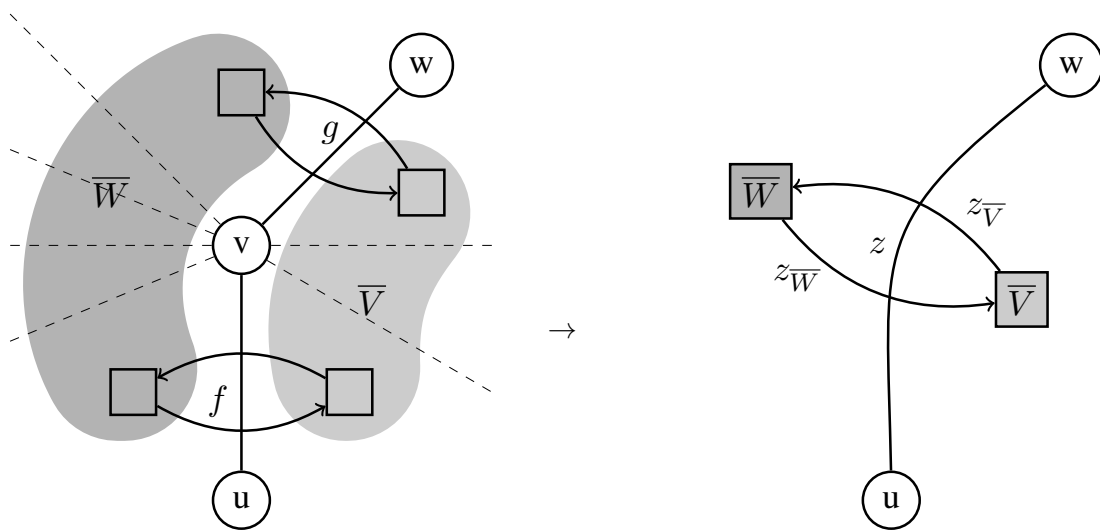
Da wir (3.0.12) nur für den Fall $v_d^* \notin \bar{W}$ betrachten, setzen wir für den anderen Fall

$$(3.0.14) \quad z_{\bar{W}} = 0 \quad \text{falls } v_d^* \in \bar{W}.$$

Wir wählen \bar{V} und \bar{W} stets so, dass $v_d^* \notin \bar{V}$.

Lemma 3.0.7 (Zulässigkeit). *Sei $x \in \{0, 1\}^E$ der charakteristische Vektor eines Baums in G und $z = x_f x_g$ mit $f = \{u, v\}$ und $g = \{v, w\}$, so sind (3.0.10)-(3.0.14) gültig für x und z .*

Beweis. Für $x_{f,u} + x_{g,w} \geq 1$ gilt (3.0.10). Sei also $x_{f,u} + x_{g,w} = 0$, das heißt $x_{f,u} = x_{g,w} = 0$. Dann folgt $z = 0$, da sonst $x_{f,v} = x_{g,v} = 1$ gelten würde, was ein Widerspruch zu (3.0.2) $x(\delta(v)) = 1$ wäre.

(a) Ausschnitt mit den Knoten u, v, w von G (b) Entsprechender Ausschnitt von H **Abbildung 3.3:** Reduktion von G zu H

Es bleibt zu zeigen, dass man $z_{\bar{V}}$ und $z_{\bar{W}}$ so wählen kann, dass (3.0.11)-(3.0.14) erfüllt sind. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $v_d^* \in \bar{W}$

Wir brauchen (3.0.12) nicht zeigen. Wegen (3.0.14) gilt $z_{\bar{W}} = 0$ und nach (3.0.13) müssen wir $z_{\bar{V}} = 1 - z$ wählen.

Ist $z = 0$ folgt also $z_{\bar{V}} = 1$ und somit:

$$y(\delta(\bar{V}) \setminus \{f, g\}) + z_{\bar{V}} \geq z_{\bar{V}} = 1$$

Ist $z = 1$, also $z_{\bar{V}} = 0$ und $x_f = x_g = 1$ so folgt mit

$$(3.0.1) \quad x_e + y_e = 1 \quad \text{für alle } e \in E,$$

dass $y_f = y_g = 0$ gilt. Da y einen Baum im dualen Graphen beschreibt gilt $y(E(\bar{V})) \leq |\bar{V}| - 1$. Mit

$$(3.0.3) \quad y(\delta(v_d)) = 1 \quad \text{für alle } v_d \in F \setminus \{v_d^*\}$$

folgt nun (3.0.11)

$$y(\delta(\bar{V}) \setminus \{f, g\}) + z_{\bar{V}} = y(\delta(\bar{V})) = \sum_{\bar{v} \in \bar{V}} y(\delta(\bar{v})) - y(E(\bar{V})) \geq |\bar{V}| - (|\bar{V}| - 1) = 1.$$

2. Fall: $v_d^* \notin \bar{W}$ (und $v_d^* \notin \bar{V}$)

Der Fall $z = 1$ für die Bedingungen (3.0.11) und (3.0.12) ist analog zum 1. Fall. Sei also $z = 0$ und nach (3.0.13) $z_{\bar{V}} + z_{\bar{W}} = 1$. Da $v_d^* \notin \bar{V} \cup \bar{W}$ aber T_d (der zu T gehörige Baum im dualen Graphen), zusammenhängend sein muss gilt ähnlich wie eben

$$(3.0.15) \quad y(\delta(\bar{V}) \setminus \{f, g\}) + y(\delta(\bar{W}) \setminus \{f, g\}) = y(\delta(\bar{V} \cup \bar{W})) \geq 1$$

Wir wählen

$$z_{\overline{V}} = \min \left\{ 1, y \left(\delta(\overline{W}) \setminus \{f, g\} \right) \right\}.$$

Damit gilt direkt (3.0.11). Aus (3.0.13) folgt

$$z_{\overline{W}} = 1 - z_{\overline{V}}.$$

Also gilt mit

$$y \left(\delta(\overline{W}) \setminus \{f, g\} \right) + z_{\overline{W}} = y \left(\delta(\overline{W}) \setminus \{f, g\} \right) + 1 - \min \left\{ 1, y \left(\delta(\overline{W}) \setminus \{f, g\} \right) \right\} \geq 1$$

(3.0.12). □

Wir wollen nun untersuchen inwiefern die Bedingungen (3.0.10)-(3.0.14) ausreichen um das QMST-Polytop zu beschreiben, also in welchen Fällen die quadratische Subtour-Eliminationsbedingung (3.0.7) erfüllt ist. Dafür stellen wir zunächst fest, dass es genügt jene Mengen S zu betrachten welche einem *zusammenhängenden Gebiet* entsprechen. Anschaulich gesprochen meinen wir: S ist zusammenhängend und hat keine „Löcher“.

Definition 3.0.8 (Zusammenhängendes Gebiet). Eine Menge $S \subseteq V$ nennen wir ein zusammenhängendes Gebiet, wenn es entweder einen Kreis $C \subseteq E$ gibt, so dass S den Knoten entspricht, die auf und innerhalb des Kreises liegen oder S den Knoten eines kreisfreien Pfades entspricht. Insbesondere ist S zusammenhängend.

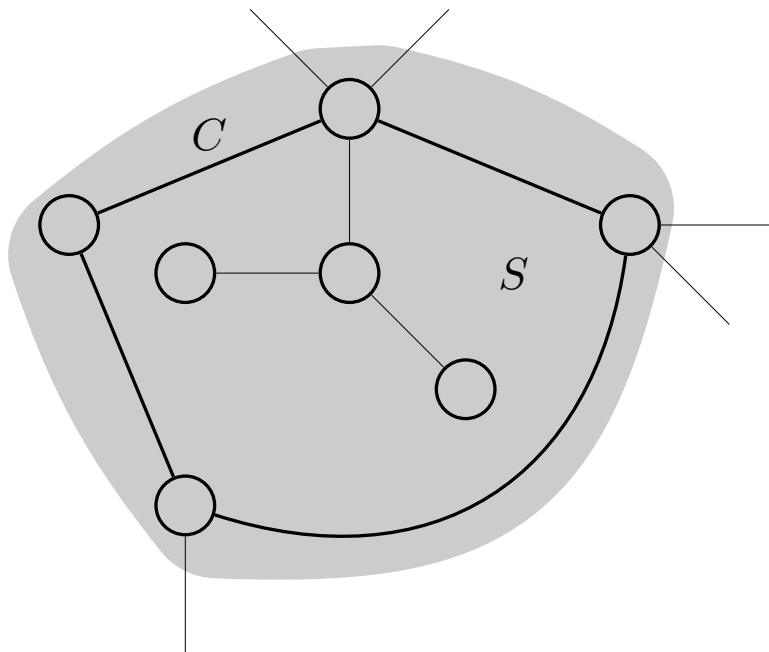


Abbildung 3.4: Zusammenhängendes Gebiet S

Lemma 3.0.9. Williams Beschreibung des MST-Polytops in 3.0.6 zusammen mit

$$(3.0.5) \quad z \leq x_f, x_g$$

$$(3.0.6) \quad z \geq x_f + x_g - 1$$

und der quadratischen Subtour-Eliminationsbedingung (3.0.7) für zusammenhängende Gebiete $S \subseteq V$ mit $u, w \in S, v \notin S$ beschreiben das QMST-Polytop mit einem quadratischen Term für planare Graphen.

Beweis. Zunächst zeigen wir dass es genügt zusammenhängende Knotenmengen S zu betrachten. Angenommen S ist nicht zusammenhängend, dann zerfällt S in mindestens zwei Zusammenhangskomponenten S_1, \dots, S_r und da $z \leq 1$ gilt

$$x(E(S)) = \sum_{i=1}^r x(E(S_i)) = |S| - r \leq |S| - 2 \leq |S| - 1 - z.$$

Sei nun also S zusammenhängend. Wenn S kein zusammenhängendes Gebiet ist, existiert ein Kreis $C \subseteq S$, so dass alle Knoten aus S auf und innerhalb von C liegen. Des Weiteren kann man C so wählen, dass auf C nur Knoten aus S liegen und v außerhalb von C ist. Sei nun \bar{S} die Menge der Knoten die auf und innerhalb von C liegen, siehe Abbildung 3.5. Somit ist \bar{S} ein zusammenhängendes Gebiet und $u, w \in S \subseteq \bar{S}, v \notin \bar{S}$. Es folgt mithilfe der quadratischen Subtour-Eliminationsbedingung

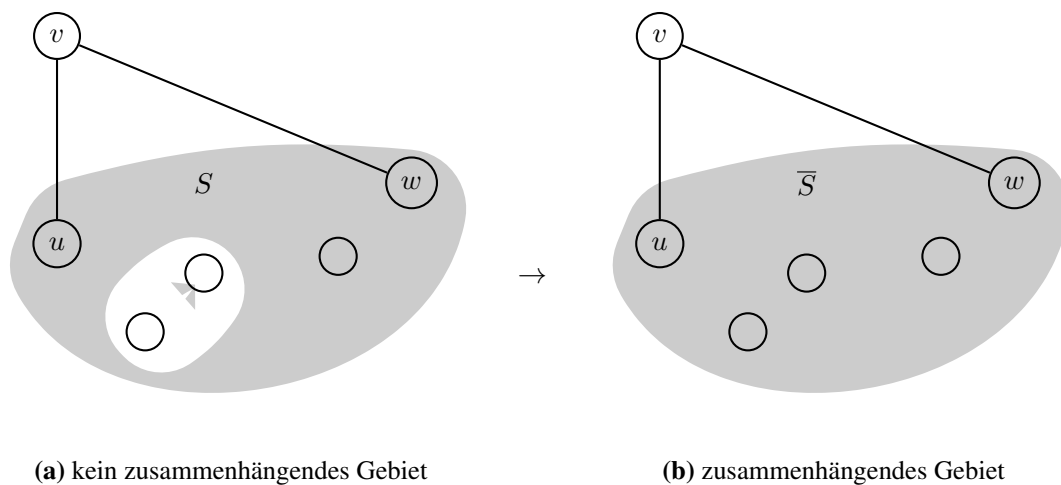


Abbildung 3.5: Konstruktion der Hülle \bar{S}

für \bar{S}

$$\begin{aligned} x(E(S)) &= x(E(\bar{S})) - x(E(\bar{S} \setminus S)) - x(\delta^{aus}(\bar{S} \setminus S)) - x(\delta^{ein}(\bar{S} \setminus S)) \\ &\leq |\bar{S}| - 1 - z - \sum_{v \in \bar{S} \setminus S} x(\delta(v)) - x(\delta^{ein}(\bar{S} \setminus S)). \end{aligned}$$

Ist $v^* \notin \bar{S} \setminus S$ so gilt

$$- \sum_{v \in \bar{S} \setminus S} x(\delta(v)) - x(\delta^{ein}(\bar{S} \setminus S)) \leq -|\bar{S} \setminus S|$$

andernfalls ($v^* \in \bar{S} \setminus S$) gilt

$$- \sum_{v \in \bar{S} \setminus S} x(\delta(v)) - x(\delta^{ein}(\bar{S} \setminus S)) = -|\bar{S} \setminus S| + 1 - x(\delta^{ein}(\bar{S} \setminus S)) \leq -|\bar{S} \setminus S|.$$

Mit $|\bar{S}| - |\bar{S} \setminus S| = |S|$ folgt

$$x(E(S)) \leq |S| - 1 - z$$

und somit ist die quadratische Subtour-Eliminationsbedingung redundant, falls S kein zusammenhängendes Gebiet ist. \square

Im folgenden sei S stets so gewählt, dass $u, w \in S, v \notin S$ und S ein zusammenhängendes Gebiet ist.

Lemma 3.0.10. *Ist $v^* \in S$ und es gelten*

$$(3.0.2) \quad x(\delta(v)) = 1 \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{v^*\}$$

$$(3.0.10) \quad x_{f,u} + x_{g,w} \geq z$$

so ist auch die quadratische Subtour-Eliminationsbedingung

$$x(E(S)) + z \leq |S| - 1$$

erfüllt.

Beweis. Wir rechnen nach

$$x(E(S)) = \sum_{v \in S} x(\delta(v)) - x(\delta(S)) = |S| - 1 - x(\delta(S)) \leq |S| - 1 - x_{f,u} - x_{g,w} \leq |S| - 1 - z.$$

\square

Es genügt also nur solche Teilmengen $S \subset V$ zu betrachten für die gilt $v^* \notin S$.

Lemma 3.0.11. *Ist $\bar{W} = \{v_d^*\}$ und $v \neq v^*$ so beschreiben (3.0.5),(3.0.6) und (3.0.10)-(3.0.14) zusammen mit Williams Formulierung in Theorem 3.0.6 das QMST-Polytop mit einem quadratischen Term.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle zusammenhängenden Gebiete $S \subseteq V$ die quadratische Subtour-Eliminationsbedingung erfüllt ist. Auf Grund von Lemma 3.0.10 können wir annehmen, dass $v^* \notin S$ gilt. Mit

$$(3.0.2) \quad x(\delta(v)) = 1 \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{v^*\}$$

erhalten wir

$$x(E(S)) = \sum_{v \in S} x(\delta(v)) - x(\delta(S)) = |S| - x(\delta(S))$$

Da v_d^* im Rand von v^* liegt und von $v \neq v^*$ ausgehend keine Kante $E(\bar{W}) = \emptyset$ kreuzt, muss man v^* von S aus über andere Kanten als f und g erreichen. Für ganzzahlige x und y welche Williams Ungleichungen erfüllen (also sich auf Bäume projizieren lassen), gilt damit

$$x(\delta(S) \setminus \{f, g\}) \geq 1.$$

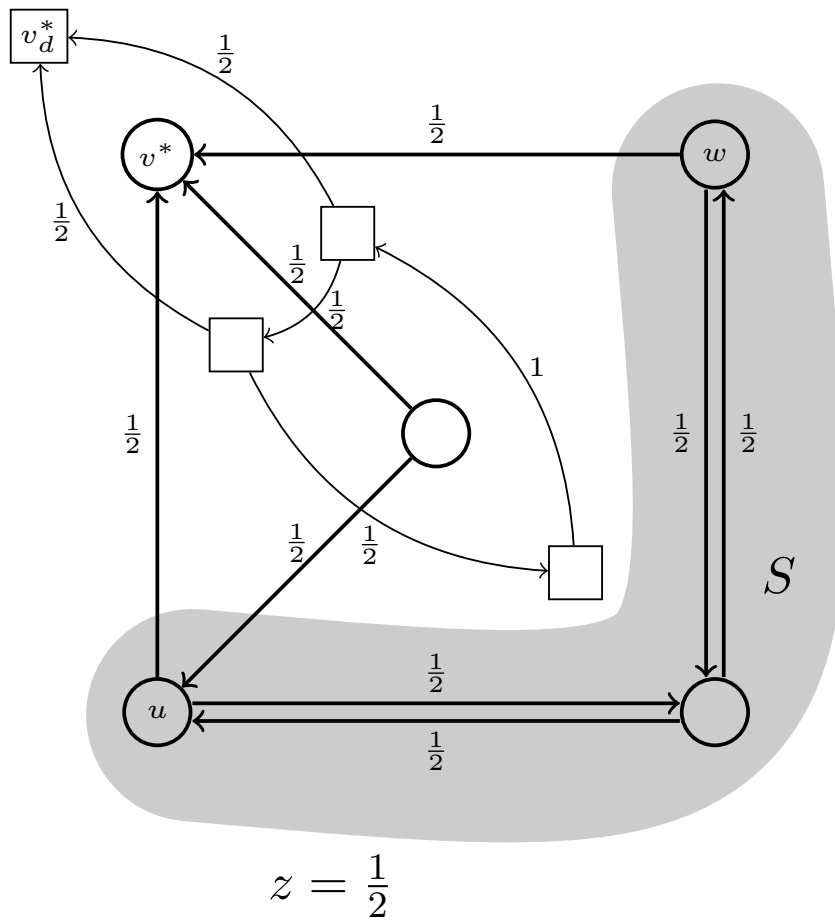


Abbildung 3.6: Beispiel für den Fall $v = v^*$

Alle nicht ganzzahligen x lassen sich als Konvexkombination ganzzahliger $x^{(i)}$ darstellen und wir erhalten

$$x(\delta(S) \setminus \{f, g\}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)}(\delta(S) \setminus \{f, g\}) \geq 1.$$

Mit

$$(3.0.10) \quad x_{f,u} + x_{g,w} \geq z$$

folgt

$$x(\delta(S)) \geq 1 + z.$$

Oben eingesetzt ergibt das die Behauptung. □

Wir haben eben den Fall $v = v^*$ ausgelassen. Für diesen Fall findet sich folgendes Gegenbeispiel:

Beispiel 3.0.12. Das Beispiel in Abbildung 3.6 erfüllt Williams Bedingungen in Theorem 3.0.6 und

die Ungleichungen (3.0.5), (3.0.6) und (3.0.10) - (3.0.14):

Ungleichung	Werte des Beispiels
(3.0.5) $z \leq x_f, x_g$	$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$
(3.0.6) $z \geq x_f + x_g - 1$	$\frac{1}{2} \geq 0$
(3.0.10) $x_{f,u} + x_{g,w} \geq z$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$
(3.0.11) $y(\delta(\overline{V}) \setminus \{f, g\}) + z_{\overline{V}} \geq 1$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq 1$
(3.0.12) $y(\delta(\overline{W}) \setminus \{f, g\}) + z_{\overline{W}} \geq 1$ falls $v_d^* \notin \overline{W}$	hier $v_d^* \in \overline{W}$
(3.0.13) $z + z_{\overline{V}} + z_{\overline{W}} = 1$	gilt mit $z_{\overline{V}} = \frac{1}{2}$
(3.0.14) $z_{\overline{W}} = 0$ falls $v_d^* \in \overline{W}$	$z_{\overline{W}} = 0$

aber für die quadratische Subtour-Eliminationsbedingung gilt

$$x(E(S)) + z = 2 + \frac{1}{2} > |S| - 1 = 2.$$

Notation. Zu einer Knotenteilmenge $S \subseteq V$ bezeichnen wir mit $G(S) \subseteq G$ den von S aufgespannten Teilgraphen und mit $F(S) = F(G(S))$ die Flächen von $G(S)$. Des Weiteren sei $F'(S)$ die Flächen in $F(S)$ ohne die äußere Fläche.

Lemma 3.0.13. *Ist $|\overline{V}| = 1$ so beschreiben (3.0.5), (3.0.6) und (3.0.10)-(3.0.14) zusammen mit Williams Formulierung in Theorem 3.0.6 das QMST-Polytop mit einem quadratischen Term.*

Beweis. Wir müssen wieder zeigen, dass für zusammenhängende Gebiete $S \subseteq V$ die quadratische Subtour-Eliminationsbedingung erfüllt ist. Auch hier nehmen wir wieder $v^* \notin S$ an. Daraus folgt $v_d^* \notin F'(S)$, da v_d^* im Rand von v^* liegen muss. Zusammen mit (3.0.1) gilt nun

$$\begin{aligned} |E(S)| &= \sum_{e \in E(S)} (x_e + y_e) \\ &= x(E(S)) + \sum_{v \in F'(S)} y(\delta(v)) + y(\delta^{ein}(F'(S))) \\ &= x(E(S)) + |F'(S)| + y(\delta^{ein}(F'(S))) \end{aligned}$$

Mit $|F'(S)| = |F(S)| - 1$ und dem eulerschen Polyedersatz für planare Graphen folgt

$$(3.0.16) \quad |S| - 1 = x(E(S)) + y(\delta^{ein}(F'(S))).$$

Da

$$y(\delta(\overline{V})) = 1$$

und

$$y((\overline{V}) \setminus \{f, g\}) \geq 1 - z_{\overline{V}}$$

folgt

$$y_{f, \overline{V}} + y_{g, \overline{V}} \leq z_{\overline{V}},$$

wobei $y_{f, \overline{V}}$ bzw. $y_{g, \overline{V}}$ die aus \overline{V} ausgehende Kante ist, welche f bzw. g kreuzt. Sei $I \subset F$ die Flächen zwischen $G(S)$ und den Kanten f und g . Dies ist wohldefiniert, da S ein zusammenhängendes Gebiet

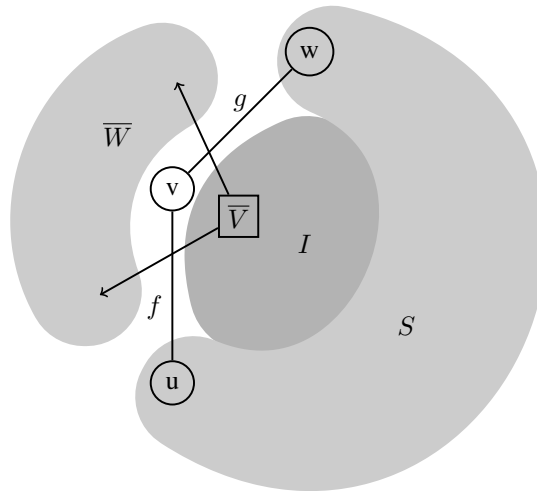


Abbildung 3.7: Definition von I

ist. Sei $V'(I)$ analog zu $F'(S)$ definiert. Das heißt $G_d(I)$ ist ein Teilgraph des dualen Graphen von G und $V(I)$ sind die dazu gehörigen Knoten in G , also die Flächen zu $G_d(I)$ ohne die äußere.

Für den Fall $v = v^*$ folgt $v_d^* \in \bar{W}$ also insbesondere $v_d^* \notin I$, in diesem Fall gilt

$$y(\delta(I)) \geq 1$$

und somit folgt

$$y(\delta^{in}(F'(S))) \geq y(\delta(I) \setminus \{f, g\}) \geq 1 - z_{\bar{V}} \geq 1 - z_{\bar{V}} - z_{\bar{W}} = z$$

und mit (3.0.16)

$$x(E(S)) + z \leq |S| - 1.$$

Sei nun $v_d^* \in I$, also insbesondere $v \neq v^*$. Mit $v^* \notin S$ muss $v^* \in V'(I)$ gelten, da v^* im Rand von v_d^* liegen muss. In diesem Fall gilt analog zum Beweis des vorigen Lemmas:

$$x(\delta(S)) \geq 1 + z$$

und somit

$$x(E(S)) = |S| - x(\delta(S)) \leq |S| - 1 - z.$$

□

Außer dem Fall $\bar{W} = \{v_d^*\}$ mit $v = v^*$ haben wir eine vollständige Beschreibung des QMST-Polytops für planare Graphen für die Fälle $|\bar{V}| = 1$ oder $|\bar{W}| = 1$. Das heißt die Kanten f und g liegen an mindestens einer gemeinsamen Facette. Für die Fälle mit sowohl $|\bar{V}| > 1$ als auch $|\bar{W}| > 1$ reichen unsere Ungleichungen leider nicht aus um das QMST-Polytop vollständig zu beschreiben. Das folgende Beispiel zeigt dies.

Beispiel 3.0.14. Das Beispiel in Abbildung 3.8 erfüllt Williams Bedingungen in Theorem 3.0.6 und die Ungleichungen (3.0.5), (3.0.6) und (3.0.10)-(3.0.14):

Ungleichung	Werte des Beispiels
(3.0.5) $z \leq x_f, x_g$	$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$
(3.0.6) $z \geq x_f + x_g - 1$	$\frac{1}{2} \geq 0$
(3.0.10) $x_{f,u} + x_{g,w} \geq z$	$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$
(3.0.11) $y(\delta(\overline{V}) \setminus \{f, g\}) + z_{\overline{V}} \geq 1$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq 1$
(3.0.12) $y(\delta(\overline{W}) \setminus \{f, g\}) + z_{\overline{W}} \geq 1$ falls $v_d^* \notin \overline{W}$	hier $v_d^* \in \overline{W}$
(3.0.13) $z + z_{\overline{V}} + z_{\overline{W}} = 1$	gilt mit $z_{\overline{V}} = \frac{1}{2}$
(3.0.14) $z_{\overline{W}} = 0$ falls $v_d^* \in \overline{W}$	$z_{\overline{W}} = 0$

aber für die quadratische Subtour-Eliminationsbedingung gilt

$$x(E(S)) + z = 2 + \frac{1}{2} > |S| - 1 = 2.$$

Wir haben festgestellt, dass die bisher gefundenen Bedingungen im Allgemeinen nicht ausreichen um P_{QMST} zu beschreiben. Diese Ergebnis ist keine Überraschung, da wir Williams Formulierung in Theorem 3.0.6 nicht exakt auf Wälder übertragen konnten. In vielen Fällen genügt jedoch dieser Ansatz wie die vorigen Lemmata zeigen.

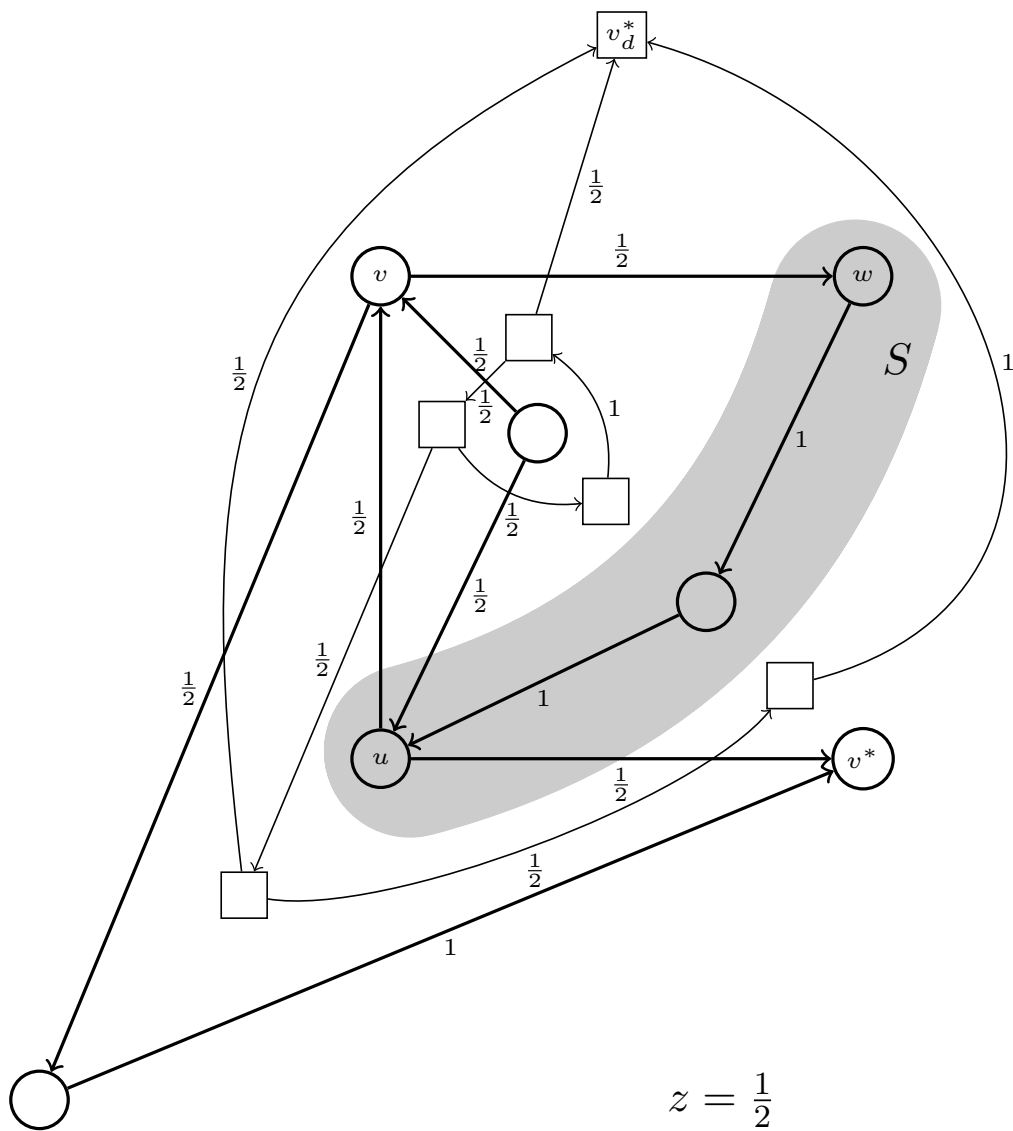


Abbildung 3.8: Beispiel für den Fall $|\bar{V}| > 1$ und $|\bar{W}| > 1$

Kapitel 4

Zusammenfassung und offene Fragen

Wir haben für das Parity-Polytop mit einem quadratischen Term eine vollständige Beschreibung gegeben. Es wäre interessant zu schauen, wie die Beschreibung für mehrere quadratische Terme aussieht? Kann man die Konstruktion der neuen Facetten auf mehrere quadratische Terme verallgemeinern und diese möglicherweise sogar auf andere Probleme wie das MST-Problem übertragen? Welchen Nutzen könnte das bringen, gibt es dann ebenfalls einen Zeitgewinn im Branch-and-Bound-Algorithmus?

Des Weiteren zeigt die Beschreibung des Parity-Polytops mit einem quadratischen Term, dass sich Buchheim und Kleins Idee durchaus auf andere Probleme übertragen lässt.

Die unbeschränkte quadratische 0, 1-Optimierung ist NP -schwer [BH91]. Haben wir nun solch ein Optimierungsproblem

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n q_{i,j} x_i x_j \mid x \in \{0, 1\}^n \right\}$$

können wir es durch hinzufügen einer weiteren Variable x_{n+1} auf ein quadratisches Parity Problem reduzieren:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n q_{i,j} x_i x_j \mid x \in \{0, 1\}^{n+1}, |x| \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Somit ist das quadratische Parity Problem im Allgemeinen ebenfalls NP -schwer. Für die erweiterte Formulierung des Parity-Polytops fanden wir einen Weg das Produkt aufeinanderfolgender Einträge einzubinden. Durch vorheriges Permutieren der Einträge decken wir damit eine Vielzahl möglicher Kombinationen quadratischer Terme in der Zielfunktion ab, für die das Problem polynomiell lösbar bleibt. Wir definieren $G_q = (V, E)$ als *Graph der quadratischen Termen*, das heißt für eine Optimierungsproblem mit der Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n q_{i,j} x_i x_j$$

sei $V = [n]$ und

$$E = \{(i, j) \in [n]^2 \mid i \neq j, q_{i,j} \neq 0\}.$$

Setzt sich G_q nun aus disjunkten kreisfreien Pfaden zusammen, so finden wir eine Permutation mit der wir die Konstruktion in Kapitel 2 anwenden können. Für diesen Fall ist das quadratische Parity-Problem also polynomiell lösbar. Es ist offen wie es für andere Strukturen von G_q aussieht. Wie ist die Komplexität zum Beispiel, wenn G_q ein Baum oder Wald ist?

Beim QMST-Problem in planaren Graphen konnten wir das Polytop mit einem quadratischen Term bereits für viele Fälle beschreiben. Das Problem in unserem Ansatz war, dass wir Williams erweiterte Formulierung für Bäume nicht auf Wälder übertragen konnten. Allgemein scheint das Minimale-Spannwald-Problem (MSF) bisher nicht viel Beachtung bekommen zu haben. Im Zusammenhang mit quadratischen Zielfunktionen wäre eine genauere Erforschung dessen insbesondere in planaren Graphen für das QMST-Problem vermutlich hilfreich.

Wir wissen dass das QMST-Problem im Allgemeinen NP -schwer ist. Gilt dies auch für planare Graphen? Wenn ja, welche Sorten und/oder Kombinationen der quadratischen Terme erlauben noch eine polynomielle Lösbarkeit? Eine Betrachtung der Komplexität des Problems erlaubt Rückschlüsse in wie weit wir die erweiterte Formulierung auf weitere Fälle ausbauen können.

Lässt sich eine erweiterte Formulierung für das MST -Polytop für beliebige Graphen zu eine erweiterten Formulierung des $QMST$ -Polytops anpassen? Für welche quadratischen Terme und für welche Strukturen von G_q bleibt die Formulierung polynomiell? Für beliebig viele quadratische Terme ist keine polynomielle erweiterte Formulierung zu erwarten, da sonst $P = NP$.

Literaturverzeichnis

- [AX92] ASSAD, ARJANG und WEIXUAN XU: *The quadratic minimum spanning tree problem*. Naval Research Logistics (NRL), 39(3):399–417, 1992.
- [BH91] BOROS, ENDRE und PETER L. HAMMER: *The max-cut problem and quadratic 0–1 optimization; polyhedral aspects, relaxations and bounds*. Annals of Operations Research, 33(3):151–180, 1991.
- [BK13] BUCHHEIM, CHRISTOPH und LAURA KLEIN: *The spanning tree problem with one quadratic term*. In: CORNELISSEN, KAMIEL, RUBEN HOEKSMAN, JOHANN HURINK und BODO MANTHEY (Herausgeber): *CTW*, Band WP 13-01 der Reihe *CTIT Workshop Proceedings*, Seiten 31–34, 2013.
- [BK14] BUCHHEIM, CHRISTOPHER und LAURA KLEIN: *Combinatorial Optimization with One Quadratic Term: Spanning Trees and Forests*. Discrete Applied Mathematics, 2014. wird noch erscheinen.
- [CCZ13] CONFORTI, MICHELE, GÉRARD CORNUÉJOLS und GIACOMO ZAMBELLI: *Extended formulations in combinatorial optimization*. Annals of Operations Research, 204(1):97–143, 2013.
- [FF13] FISCHER, ANJA und FRANK FISCHER: *Complete description for the spanning tree problem with one linearised quadratic term*. Operations Research Letters, 41(6):701 – 705, 2013.
- [Mar91] MARTIN, R.KIPP: *Using separation algorithms to generate mixed integer model reformulations*. Operations Research Letters, 10(3):119 – 128, 1991.
- [Wil02] WILLIAMS, JUSTIN C.: *A linear-size zero–one programming model for the minimum spanning tree problem in planar graphs*. Networks, 39(1):53–60, 2002.
- [Yan91] YANNAKAKIS, MIHALIS: *Expressing combinatorial optimization problems by Linear Programs*. Journal of Computer and System Sciences, 43(3):441 – 466, 1991.

Danksagung

An erster Stelle danke ich Gott meinem Vater, der mich täglich mit allem versorgt, was ich zum Leben brauche. So hatte ich den Kopf frei mich auf diese Arbeit zu konzentrieren. Ich danke Gott auch als meinem Schöpfer, der mir Kreativität und die Fähigkeit mathematisch zu denken gegeben hat. Ganz besonders danke ich ihm für die vielen Ideen, die immer wieder in meinem Kopf auftauchen.

Des Weiteren möchte ich Prof. Dr. Kaibel für die gute Betreuung danken. Danke für die Zeit, die Sie sich für mich genommen haben, die guten Gespräche und die wirklich hilfreichen Tipps.

Ein großes Dankeschön geht auch an meinen Mann Rafael für die ständige Stärkung meines Selbstbewusstseins und für die Finanzierung des Studiums.

Erklärung zur Selbständigkeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ort, Datum, Unterschrift